E.N.S.I. DE CHIMIE groupe Nord 1983

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES (4 h)

Soit l'équation différentielle du premier ordre

(E) $$y' + xy = x^3$$

dans laquelle y désigne une fonction inconnue, réelle, définie sur $\mathbb{R}$, dérivable, de la variable x.

I

Donner l'expression de la solution générale de (E). Montrer que pour tout nombre réel C, il existe une solution, et une seule, de (E) telle que

$$y(0) = C$$

Dans tout ce qui suit, on notera $x \longrightarrow f(x, C)$ cette solution.

II

1° *a.* Étudier les variations des fonctions $x \longrightarrow f(x, C)$ selon les valeurs de C.

b. Préciser le comportement des branches infinies des courbes Γ_C.

2° Déterminer deux ensembles L_1 et L_2 définis comme il suit :

a. L_1 : ensemble des points P des courbes Γ_C, à tangentes parallèles à Ox, C parcourant $\mathbb{R}$.

b. L_2 : ensemble des points P qui sont d'inflexion sur les courbes Γ_C, C parcourant $\mathbb{R}$.

Discuter le nombre des points P d'une courbe Γ_C, selon les valeurs de C, dans chacun des deux cas *a.* et *b.*

Donner l'allure des ensembles L_1 et L_2 relativement à un repère orthonormé Ox, Oy.

Préciser, en conclusion de cette étude, la concavité des courbes Γ_C.

3° Donner la représentation graphique de quelques courbes Γ_C, montrant les différentes formes qui peuvent être obtenues selon les valeurs de C.

4° On se donne $x \neq 0$: montrer que les tangentes aux points d'abscisse x, des courbes Γ_C se coupent en un même point S (x) lorsque C parcourt $\mathbb{R}$.

Déterminer la courbe Σ, ensemble des points S (x).

Donner l'allure de Σ (on demande l'étude des branches infinies et des inflexions).

III

1° Déterminer une fonction-polynôme p, réelle, de degré 3 au plus

$$x \longrightarrow p(x)$$

telle que p satisfasse à (E) pour $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$ et telle que

$$p(0) = C.$$

2° Prenant $C = 1$, on pose

$$d(x) = f(x, 1) - p(x) \qquad \text{pour} \qquad x \in [0\,;\,1]$$

a. Montrer que d' admet un unique zéro, noté a dans $]0\,;\,1[$.

b. Localiser a dans un intervalle de longueur 0,05.

c. Établir le tableau des variations de d pour $x \in [0\,;\,1]$ et déterminer, numériquement,

$$\sup_{x \in [0\,;\,1]} \{ f(x, 1) - p(x) \}$$

par une valeur approchée.

En conclusion de cette étude, énoncer une propriété de p vis-à-vis de (E) sur $[0\,;\,1]$.

FIN